Matemática Aplicada

Aula 3

- Conjuntos Reais

- Equações e Sistemas

Prof. Jefferson Ricart Pezeta

1. Números Reais

Conjunto dos números reais – IR

O conjunto dos números reais é composto pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais (dízimas infinitas não periódicas).

Conjunto dos números irracionais

Os números irracionais são decimais infinitas não periódicas, ou seja, os números que não podem ser escritos na forma de fração (divisão de dois inteiros). Como exemplo de números irracionais, temos a raiz quadrada de 2 e a raiz quadrada de 3:

Exemplos

Um número irracional bastante conhecido é o número π que equivale a 3,1415926535...

$\sqrt{2} = 1{,}4142135...$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

Observação

Entre dois números inteiros existem infinitos números reais.

Por exemplo, entre os números 1 e 2 existem infinitos números reais, como: 1,01; 1,001; 1,0001; 1,1; 1,2; 1,5; 1,99; 1,999; 1,9999; ...

Intervalo

Dados dois números reais **p** e **q**, chama-se **intervalo** a todo conjunto de todos os números reais compreendidos entre **p** e **q**, podendo inclusive incluí-los.

Os números **p** e **q** são os limites do intervalo, sendo a diferença **p - q** chamada de amplitude do intervalo. Se o intervalo incluir **p** e **q**, o intervalo é fechado; caso contrário, o intervalo é dito aberto. A tabela abaixo define os diversos tipos de intervalos.

Tipos de intervalos	Representação	Observação
Fechado	$[p;q] = \{x \in R;\ p \leq x \leq q\}$	inclui p e q
Aberto	$(p;q) = \{ x \in R;\ p < x < q\}$	exclui p e q
Fechado à esquerda	$[p;q) = \{ x \in R;\ p \leq x < q\}$	inclui p e exclui q
Fechado à direita	$(p;q] = \{x \in R;\ p < x \leq q\}$	exclui p e inclui q
Semifechado	$[p\ \infty) = \{x \in R;\ x \geq p\}$	valores maiores ou iguais a p
Semifechado	$(-\infty;\ q] = \{ x \in R;\ x \leq q\}$	valores menores ou iguais a q
Semiaberto	$(-\infty\ ;\ q) = \{ x \in R;\ x < q\}$	valores menores que q
Semiaberto	$(p;\ \infty) = \{ x > p \}$	valores maiores que p

Adição algébrica entre números reais

A adição entre duas parcelas só é possível se os termos forem semelhantes.

Exemplos

I. A expressão algébrica $3x + 2y - 4x + 7y$ pode ser reduzida adicionando-se os termos semelhantes: $(3x - 4x) + (2y + 7y) = -x + 9y$

II. A expressão numérica $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7} - 4\sqrt{2} + 7\sqrt{7}$ pode ser reduzida adicionando-se os termos semelhantes: $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) + (2\sqrt{7} + 7\sqrt{7}) = -\sqrt{2} + 9\sqrt{7}$

Multiplicação entre números reais

O produto de dois ou mais radicais de mesmo índice é um radical com o mesmo índice dos fatores cujo radicando é igual ao produto dos radicandos dos fatores.

Exemplo

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{10}$

Potenciação de números reais

A potência é calculada usando a definição, ou seja, ser a multiplicação entre números reais da base. Por exemplo: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = 3$

Racionalização de números irracionais

Racionalizar uma expressão é deixá-la com o denominador inteiro, não importando o tipo de valor que resultará no numerador. A escolha do fator multiplicativo está relacionada com a necessidade de transformar o valor do denominador num número natural, mas sem alterar o valor absoluto da fração inicial.

Exemplo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}7071\ldots$$

2. Exercícios

1. Calcule, utilizando a calculadora, o valor das raízes quadradas, escrevendo o resultado com até duas casas decimais:

a. $\sqrt{2}=$

b. $\sqrt{3}=$

c. $\sqrt{5}=$

d. $-\sqrt{5}=$

e. $\sqrt{-5}=$

f. $\pi=$

2. Escreva, na forma mais simples possível, cada uma das expressões:

a. $10\sqrt{6}-8\sqrt{3}+7=$

b. $-17+10\sqrt{2}=$

c. $-4\sqrt{10}+5-10\sqrt{5}=$

3. Calcule as somas algébricas. Sugestão: fatore os radicais, simplifique-os, em seguida efetue as adições entre os termos semelhantes.

a. $3\sqrt{125}+7\sqrt{45}=$

b. $\frac{\sqrt{48}}{4}-\frac{\sqrt{243}}{2}-\frac{2\sqrt{12}}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=$

c. $\sqrt{18}+5\sqrt{50}-2\sqrt{98}+\sqrt{72}=$

4. Efetue as multiplicações:

a. $7\sqrt{8}\cdot 8\sqrt{2}=$

b. $3\sqrt{6}\cdot(-2\sqrt{5})\cdot 2\sqrt{10}=$

c. $\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{6}=$

5. Calcule, utilizando a propriedade distributiva:

a. $\sqrt{3}(1+\sqrt{5})=$

b. $(6\sqrt{8}+8\sqrt{2})(8\sqrt{3}+3\sqrt{2})=$

c. $\frac{\sqrt{8}}{4}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)=$

6. Usando a definição de potência, o conceito de multiplicação entre números reais, calcule:

a. $(\sqrt{3})^2=$

b. $(\sqrt{4})^5=$

c. $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4=$

Resoluções

2. Exercícios

1. Calcule, utilizando a calculadora, o valor das raízes quadradas, escrevendo o resultado com até duas casas decimais:

a. $\sqrt{2} =$

b. $\sqrt{3} =$

c. $\sqrt{5} =$

d. $-\sqrt{5} =$

e. $\sqrt{-5} =$

f. $\pi =$

Usando a calculadora fica fácil. Vamos lá.

a) 1,41 b) 1,73 c) 2,236 = 2,24 d) – 2,24 e) não existe no conjunto dos reais f) 3,14

2. Escreva, na forma mais simples possível, cada uma das expressões:

a. $10\sqrt{6} - 8\sqrt{3} + 7 =$

Como o próprio enunciado diz, devemos tornar o mais simples possível, ou simplesmente simplificar a expressão. Para isso devemos agrupar as operações que tiverem a mesma raiz. Observe que neste caso isso não ocorre. Desta forma, não há como fazer simplificação neste exercício.

b. $-17 + 10\sqrt{2} =$

Este caso também não há como simplificar.

c. $-4\sqrt{10} + 5 - 10\sqrt{5} =$

Idem

3. Calcule as somas algébricas. Sugestão: fatore os radicais, simplifique-os, em seguida efetue as adições entre os termos semelhantes.

a. $3\sqrt{125} + 7\sqrt{45} =$

Para resolver este exercício, devemos simplificar as expressões. Observe que 125 e 45 podem ser decompostos em números primos de forma a ser possível a simplificação.

Ao decompor 125 em fatores primos temos que 125 = 5.5.5 = $5^2.5$

Ao decompor o 45 temos que 45 = 3.3.5 = $3^2.5$

Assim sendo, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$3\sqrt{5^2.5} + 7\sqrt{3^2.5}$$

Simplificando o quadrado dos radicandos (números de dentro das raízes) com os índices quadrados das raízes, temos:

$$3.5\sqrt{5} + 7.3\sqrt{5} \rightarrow 15\sqrt{5} + 21\sqrt{5}$$

Agora que as raízes possuem o mesmo índice e o mesmo radicando, basta efetuarmos a soma, obtendo como resultado final $36\sqrt{5}$

b. $\frac{\sqrt{48}}{4} - \frac{\sqrt{243}}{2} - \frac{2\sqrt{12}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2} =$

Podemos começar resolvendo este exercício de duas maneiras: ou simplificando as raízes ou definindo o mmc. Vou optar pela primeira opção.

Desta forma, vamos simplificar as raízes. Começando pela raiz de 48, temos que 48 = 2.2.2.2.3 = $2^2.2^2.3$. Temos também que 243 = 3.3.3.3.3 = $3^2.3^2.3$. Decompor o 12 é fácil, pois 12 = 2.2.3 = $2^2.3$. Desta forma, podemos reescrever a equação como:

$$\frac{\sqrt{2^2.2^2.3}}{4} - \frac{\sqrt{3^2.3^2.3}}{2} - \frac{2\sqrt{2^2.3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Observe que, ao simplificarmos as raízes, todas terão o mesmo radicando e o mesmo índice.

$$\frac{2.2\sqrt{3}}{4} - \frac{3.3\sqrt{3}}{2} - \frac{2.2\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Antes de definirmos o mínimo, podemos simplificar algumas das frações.

$$\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Agora podemos calcular o mínimo e resolver as somas.

$$\frac{6\sqrt{3} - 27\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{6} = -\frac{16\sqrt{3}}{6}$$

Simplificando 16 e 6 por 2, temos $-\frac{8\sqrt{3}}{3}$

c. $\sqrt{18}+5\sqrt{50}-2\sqrt{98}+\sqrt{72}=$

Iniciaremos decompondo os radicandos:

$18 = 3.3.2 = 3^2.2$

$50 = 5.5.2 = 5^2.2$

$98 = 2.7.7 = 7^2.2$

$72 = 2.2.2.3.3 = 2^2.3^2.2$

Desta forma, podemos reescrever a expressão.

$$\sqrt{2.3^2} + 5\sqrt{2.5^2} - 2\sqrt{2.7^2} + \sqrt{2^2.3^2.2} \rightarrow 3\sqrt{2} + 5.5\sqrt{2} - 2.7\sqrt{2} + 2.3\sqrt{2}$$

Agora que temos raízes com mesmo índice e radicando, podemos resolver as adições.

$$3\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - 14\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

4. Efetue as multiplicações:

a. $7\sqrt{8}\cdot 8\sqrt{2}=$

Para multiplicar raízes de mesmo índice basta multiplicarmos os radicandos. Assim sendo, podemos reescrever a expressão da seguinte forma.

$$7.8.\sqrt{8}.\sqrt{2} \rightarrow 56\sqrt{16} \rightarrow 56\,.\,4 = 224$$

b. $3\sqrt{6}\cdot(-2\sqrt{5})\cdot 2\sqrt{10}=$

Assim como o exercício anterior, podemos reescrever a expressão, obtendo:

$$3.(-2).2.\sqrt{6}\,.\sqrt{5}\,.\sqrt{10} \rightarrow -12\sqrt{300}$$

Decompondo 300 temos que $300 = 2.2.3.5.5 = 3.2^2.5^2$. Assim sendo, temos:

$$-12\sqrt{3.2^2.5^2} \rightarrow -12.2.5\sqrt{3} = -120\sqrt{3}$$

c. $\dfrac{\sqrt{10}}{4} \cdot \dfrac{5\sqrt{2}}{6} =$

Multiplicando numerador com numerador e denominador com denominador temos:

$$\frac{5\sqrt{20}}{24}$$

Decompondo 20 temos que 20 = 2.2.5 = 2^2.5. Assim sendo, temos:

$$\frac{5.2\sqrt{5}}{24} \rightarrow \frac{10\sqrt{5}}{24}$$

Simplificando 10 e 24 por 2 temos $\frac{5\sqrt{5}}{12}$

5. Calcule, utilizando a propriedade distributiva:

a. $\sqrt{3}(1+\sqrt{5}) =$

Aplicando a distributiva temos:

$$\sqrt{3}.1 + \sqrt{3}.\sqrt{5} \rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{15}$$

b. $(6\sqrt{8}+8\sqrt{2})(8\sqrt{3}+3\sqrt{2}) =$

Primeiro vamos decompor o 8, obtendo 8 = 2.2.2 = 2^2.2

$$(6.2\sqrt{2} + 8\sqrt{2})(8\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \rightarrow 20\sqrt{2}\,(8\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$$

Aplicando a distributiva temos:

$$160\sqrt{6} + 60\sqrt{4} \rightarrow 160\sqrt{6} + 60.2 = 160\sqrt{6} + 120$$

c. $\dfrac{\sqrt{8}}{4}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{2}\right) =$

Decompondo o 8 temos:

$$\frac{2\sqrt{2}}{4}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Aplicando a distributiva temos:

$$\frac{5.2}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \frac{10}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Simplificando o 10 e o 8 por 2 temos:

$$\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{5 + \sqrt{2}}{4}$$

6. Usando a definição de potência, o conceito de multiplicação entre números reais, calcule:

a. $\left(\sqrt{3}\right)^2 =$

b. $\left(\sqrt{4}\right)^5 =$

c. $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 =$

A resolução destes exercícios é muito simples. Basta aplicar o conceito de potência.

a. $\sqrt{3}.\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$
b. $\sqrt{4}.\sqrt{4}.\sqrt{4}.\sqrt{4}.\sqrt{4} = \sqrt{1024} = 32$
c. $\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$

1. Equação do 1º Grau

Um problema

A tabela abaixo apresenta as notas de avaliações de matemática de determinado aluno durante o semestre letivo, com seus respectivos pesos:

Prova	*P1*	*B1*	*P2*	*B2*
Nota	*4,0*	*5,0*	*4,5*	
Peso	*1,6*	*2,4*	*2,4*	*3,6*

As notas das avaliações são sempre arredondas de 0,5 em 0,5 ponto, e para o aluno ser aprovado é necessário que a média final ponderada, calculada entre as quatro provas, seja maior ou igual a 5,0.

Qual deve ser a nota mínima da prova B2 para que o aluno seja aprovado?

***Resolução**:*

Sendo x a nota B2 e M a média, temos:

$$M = \frac{1{,}6.4 + 2{,}4.5 + 2{,}4.4{,}5 + 3{,}6.x}{1{,}6 + 2{,}4 + 2{,}4 + 3{,}6}$$

Para determinar x, sendo M=5, precisamos resolver uma equação do 1º grau, ou seja:

$$\frac{29{,}2 + 3{,}6.x}{10} = 5$$

Equação

É uma afirmativa de igualdade entre duas expressões.

Equação do 1º grau sobre uma variável

É uma equação que pode ser escrita na forma: $ax + b = 0$, sendo a e b números reais com a≠0.

Exemplos

$2x - 4 = 0$ é uma equação linear sobre a variável x.

$\frac{4}{3}z+12=0$ é uma equação linear sobre a variável z.

Solução ou raiz

Uma solução, ou raiz, de uma equação em x é um valor de x para o qual a equação é verdadeira.

Uma equação do 1° grau em uma variável tem exatamente uma solução.

Exemplos

x=2 é solução de $2x-4=0$, pois $2.2-4=4-4=0$

$z=-9$ é solução de $\frac{4}{3}z+12=0$, pois $\frac{4}{3}.(-9)+12=-12+12=0$

Equações equivalentes

Duas ou mais equações são equivalentes quando possuem a mesma solução.

Exemplos

$2x-4=0$, $2x=4$ e x = 2 são todas equivalentes.

$\frac{4}{3}z+12=0$, $\frac{4}{3}z=-12$ e $z=-9$ são todas equivalentes.

Resolução de uma equação do 1° grau

- Resolver uma equação é transformá-la em uma equação equivalente cuja solução é óbvia.
- Para resolver uma equação do 1° grau isolamos a incógnita em um dos membros da igualdade, usando as propriedades:
  1. "Ao adicionar ou subtrair o mesmo valor aos dois membros de uma igualdade, ela não se altera."
  2. "Ao multiplicar ou dividir por uma constante não nula (diferente de zero) os dois membros de uma igualdade, ela não se altera."

Exemplos

1. Resolver a equação $s-3=5$:

Para determinar o valor de **s**, somamos 3 aos dois membros $s-3+3=5+3$ e obtemos: $s=8$

2. Resolver a equação $3p + 1 = 10$:

Para determinar o valor de **p**, primeiro somamos –1 aos dois membros: $3p + 1 - 1 = 10 - 1$

obtendo: $3p = 9$

Dividindo os dois membros por 3, temos: $\frac{3p}{3} = \frac{9}{3}$ e portanto $p = 3$

3. Sabendo que $-2x - 3 = 7$, calcule x:

Somando 3 aos dois membros, temos:

$-2x - 3 + 3 = 7 + 3$

$-2x = 10$

Para obtermos x, dividimos os dois membros por –2: $\frac{-2x}{-2} = \frac{10}{-2}$

$x = -5$

4. Encontre a raiz da equação $3(s - 4) = 80 - 2(3s + 1)$:

Aplicando inicialmente a propriedade distributiva para simplificar as expressões, obtemos:

$3s - 12 = 80 - 6s - 2$

Somando 6s aos dois membros, temos:

$3s - 12 + 6s = 80 - 6s - 2 + 6s$

$9s - 12 = 78$

Somando 12 aos dois membros, temos: $9s = 90$

Para obtermos **s**, dividimos os dois membros por 9: $\frac{9s}{9} = \frac{90}{9}$

$s = 10$

5. Resolver a equação $\frac{x+2}{4}=\frac{2}{5}$:

Multiplicando os dois membros pelo mínimo múltiplo comum entre 4 e 5, m.m.c.(4,5)=20, temos:

$$20.\frac{x+2}{4}=20.\frac{2}{5}$$

ou seja:

$$5.(x+2)=8$$

aplicando a propriedade distributiva, temos: $5x+10=8$

Somando –10 aos dois membros, temos: $5x=-2$

Para obtermos **x**, precisamos dividir os dois membros por 5.

Então $x=\frac{-2}{5}$

Observações

A equação ax=b, com a=0 não foi definida como equação do 1° grau.
Quando a=0 e b≠0 a equação ax=b é impossível (ou seja, não possui solução):

Por exemplo, a equação $2(6x-4)=3(4x-1)$ não possui solução.

Essa equação não é equivalente a uma equação do 1° grau ax=b, com a≠0, pois aplicando a propriedade distributiva para simplificar e depois somando (–12x) aos dois membros, obtemos:

$$12x-8=12x-3$$
$$-8=-3$$

que é uma equação falsa.

Quando a=b=0, a equação ax=b é indeterminada (ou seja, não possui infinitas soluções).

Por exemplo, a equação $2(6x-3)=3(4x-2)$ possui infinitas soluções.

Essa equação não é equivalente a uma equação do 1° grau ax=b, com a≠0, pois aplicando a propriedade distributiva para simplificar e depois somando (–12x) aos dois membros obtemos:

$$12x-6=12x-6$$
$$-6=-6$$

2. Sistemas de Equações do 1° Grau

Um problema:

Um estagiário trabalha 20 horas por semana, no total, em duas empresas: A e B. A empresa A paga R$12,00 por hora e a B paga R$ 20,00 por hora.

Certa semana ele recebeu R$ 360,00. Quantas horas ele trabalhou em cada empresa?

Resolução

Considerando que o estagiário trabalhou x horas na empresa A e y horas na empresa B, temos que:

(1) $x + y = 20$ *e*

(2) $12x + 20y = 360$

Essas duas equações determinam um sistema de equações.

Sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas

Um sistema linear sobre as variáveis x e y é descrito por:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

sendo a,b,c,d,e,f constantes.

Exemplos

$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ é um sistema linear nas variáveis x e y.

$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a - 6b = 3 \end{cases}$ é um sistema linear nas variáveis a e b.

Solução de um sistema

Uma solução de um sistema de duas equações com duas variáveis é um par ordenado que satisfaz cada uma das equações.

Exemplos

(1,2) é solução do sistema $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$, pois substituindo x=1 e y=2 nas equações, obtemos:

$$\begin{cases} 1-2=-1 \\ 2.1+2=4 \end{cases}$$

e portanto ambas são satisfeitas.

(0,1) não é solução do sistema $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$, pois substituindo x=0 e y=1 nas equações, obtemos:

$$\begin{cases} 0-1=-1 \\ 2.0+1\neq 4 \end{cases}$$

e a segunda equação não é satisfeita.

Resolução de um sistema de equações do primeiro grau

(1) Método da substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas de uma das equações e em seguida substituir a expressão na outra equação.

Exemplo

Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+3y=55 \end{cases}$

Podemos isolar o valor de x na primeira equação: $x=25-y$

Em seguida, substituímos esta expressão na segunda equação: $2.(25-y)+3y=55$

e resolvemos a equação, obtendo o valor de y: $\begin{array}{l} 50-2y+3y=55 \\ 50+y=55 \\ y=5 \end{array}$

Agora, substituímos o valor de x em qualquer uma das equações dadas, obtemos o valor de x:

$$\begin{array}{l} x+y=25 \\ x+5=25 \\ x=20 \end{array}$$

Observação

Um procedimento equivalente para resolver esse sistema, por exemplo, isolando y na segunda equação e substituindo a expressão na primeira equação para resolver uma equação em x.

Todos os procedimentos equivalentes resultam na mesma solução.

(2) Método da adição (ou cancelamento)

Esse método consiste em somar membro a membro das duas equações, com o objetivo de eliminar uma das incógnitas.

Nesse processo, cada uma das equações pode ser multiplicada por uma constante não nula, já que isto não altera sua solução (ver detalhes no estudo de equações do 1º grau).

Exemplo

Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+3y=55 \end{cases}$

Podemos notar que ao somar membro a membro as equações dadas, nenhuma incógnita é eliminada: 3x+4y=80

No entanto, podemos multiplicar a primeira equação por –2:

$$\begin{cases} -2x-2y=-50 \\ 2x+3y=55 \end{cases}$$

e em seguida somar membro a membro com a segunda equação, eliminando x e encontrando o valor de y:

$$-2x+2x-2y+3y=-50+55$$
$$y=5$$

o valor de x é obtido substituindo y em qualquer uma das equações do sistema:

$$x+y=25$$
$$x+5=25$$
$$x=20$$

Observação

Um procedimento equivalente pode, por exemplo, consistir em multiplicar a primeira equação por –3, somar membro a membro com a segunda equação para eliminar a variável y. Nesse caso o valor de x será encontrado e substituído em uma das equações para determinar y.

Todos os procedimentos equivalentes resultam na mesma solução.

Observações

- Quando as equações do sistema são incompatíveis, o sistema não possui solução. Esse fato será detectado durante a resolução do sistema, por qualquer um dos métodos, por meio da obtenção de uma equação falsa.

Por exemplo, na resolução do sistema $\begin{cases} x + y = 25 \\ -x - y = 55 \end{cases}$ pelo método da adição, obtemos:

$x - x + y - y = 25 + 55$
$0 = 80$

essa expressão não é verdadeira, quaisquer que sejam x e y.

Logo o sistema não tem solução.

Quando as equações do sistema são redundantes, o sistema possui infinitas soluções. Esse fato será detectado durante a resolução do sistema, por qualquer um dos métodos, pela obtenção de uma equação verdadeira para qualquer incógnita:

Por exemplo, na resolução do sistema $\begin{cases} x + y = 25 \\ -x - y = -25 \end{cases}$ pelo método da adição, obtemos:

$x - x + y - y = 25 - 25$
$0 = 0$

essa expressão é verdadeira, quaisquer que sejam x e y = 25–x .

Logo o sistema possui infinitas soluções da forma: $(x, 25 - x)$.

3. Equações do 2° Grau

Quando a equação tem mais que uma raiz

*Considere a seguinte pergunta: "**Qual é o número inteiro cujo quadrado é 81**?"*

Provavelmente responderão rapidamente.

"É nove."

Embora 9 seja uma solução, ela não é única. O número -9 elevado ao quadrado também resulta em 81, portanto, a questão admite duas soluções:

- 9 é uma solução, pois 9 . 9 = 81
- -9 é uma solução, pois (-9) . (-9) = 81

Então podemos escrever uma equação (igualdade que apresenta letras) associada a esta situação-problema: $r^2 = 81$.

Equações desse tipo são chamadas de equações do 2º grau porque o maior expoente da incógnita r é igual a 2.

Equações do 2º grau completas e incompletas

A formulação geral ou padrão de uma equação do segundo grau, na variável x, é:

$\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0}$

com **a**, **b** e **c** reais e **a** não nulo.

Equações completas e incompletas

Quando as equações do 2º grau na forma **a. variável² + b . variável + c = 0** têm todos os coeficientes diferentes de zero, dizemos que elas são completas; se ***b*** ou ***c***, ou os dois, forem iguais a zero, dizemos que elas são equações incompletas.

Exemplos

$3z^2 + 4z + 1 = 0$, completa com a = 3, b = 4 e c = 1

$-4s - 3s^2 = 0$, incompleta com a = -3, b = -4 e c = 0

$g + 3g^2 = -7$, completa, com a = 3, b = -4 e c = 7

(nesse caso, antes precisamos escrever a equação na forma padrão!)

$6n^2 = 0$, incompleta com a = 6, b = 0 e c= 0.

Observação

O coeficiente **a** não poderá ser zero, pois caso seja, deixaremos de ter uma equação do 2º grau para obtermos uma equação do primeiro grau.

Resolução de uma equação do 2º grau

Para calcular o valor da incógnita em uma equação do 2º grau utilizamos uma fórmula, que é conhecida como "fórmula de Bhaskara". Mas, na verdade, não foi ele quem a descobriu.

Bhaskara, que viveu na Índia por volta de 1150, resolveu vários problemas que envolviam equações do 2º grau. No entanto, historiadores encontraram indícios de que na civilização da Babilônia, em 1700 a.C., já eram resolvidas algumas equações do 2º grau.

A dedução dessa fórmula, para a equação do 2º grau na forma padrão ou geral: $a.x^2 + b.x + c = 0$, na variável x, está a seguir:

1º Passo – Isolamos o termo **c**: $a.x^2 + b.x = -c$

2º Passo – Multiplicamos os dois membros por **4.a**: $4.a^2.x^2 + 4.a.b.x = -4.a.c$

3º Passo – Adicionamos **b²** aos dois membros: $4.a^2.x^2 + 4.a.b.x + b^2 = b^2 - 4.a.c$

4º Passo – Completamos um quadrado no primeiro membro, então podemos fatorá-lo: $(2.a.x + b)^2 = b^2 - 4.a.c$

5º Passo – Extraímos a raiz quadrada dos dois membros: $2.a.x+b=\pm\sqrt{b^2-4.a.c}$

6º Passo – Isolamos **x***:* $\boxed{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}}$

Nessa fórmula, a expressão $b^2-4.a.c$ é representada pela letra grega maiúscula Δ (lê-se delta).

Assim teremos: $\boxed{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}}$

Exemplo

Resolver a equação $3z^2 - 10z + 3 = 0$:

Nessa equação, observamos que: a = 3, b = -10 e c = 3.

Daí, temos:

$\Delta = (-10)^2 -4.3.3= 64$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}$$

z = 3 ou z = $\dfrac{1}{3}$

Raízes da equação do 2º grau

As raízes de uma equação do 2º grau podem ser iguais, diferentes ou não pertencer ao conjunto dos reais.

O Δ (delta) também chamado de **discriminante** da equação é quem discrimina as raízes, de acordo com os critérios:

Discriminante negativo – Nenhuma raiz real.
Discriminante zero – Duas raízes reais e iguais.
Discriminante maior que zero – Duas raízes reais e diferentes.

4. Exercícios

Nos exercícios de 1 a 7, resolva as equações:

1. $2x+7=3$

2. $2-3p=5p+2$

3. $23x - 16 = 14 - 17x$

4. $-2(y-1) = 2y + 4$

5. $\dfrac{3x}{4} + 2 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{x}{6}$

6. $\dfrac{f-5}{10} + \dfrac{1-2f}{5} = \dfrac{3-f}{4}$

7. $2(6n - 4) = 3(4n - 1)$

8. A tabela abaixo apresenta as notas de avaliações de matemática de determinado aluno durante o semestre letivo, com seus respectivos pesos:

Prova	P1	B1	P2	B2
Nota	4,0	5,0	4,5	
Peso	1,6	2,4	2,4	3,6

As notas das avaliações são sempre arredondas de 0,5 em 0,5 ponto, e para o aluno ser aprovado é necessário que a média final ponderada, calculada entre as quatro provas, seja maior ou igual a 5,0.

Qual deve ser a nota mínima da prova B2 para que o aluno seja aprovado?

9. Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2m + n = -5 \\ 3m + 10n = 1 \end{cases}$

Nos exercícios de 10 a 14, determine as raízes das equações:

10. $n^2 + 12n + 35 = 0$

11. $z^2 - 12z = -35$

12. $20p + p^2 = 0$

13. $13x + 26x^2 = 0$

14. $f^2 + 4f + 4 = 0$

15. Encontre dois números cuja soma seja -9 e o produto 14.

Resoluções

4. Exercícios

Nos exercícios de 1 a 7, resolva as equações:

1. $2x + 7 = 3$

Para resolver uma equação do 1º grau, basta isolar a incógnita. Começaremos passando o 7 para o outro lado da igualdade, aplicando a operação inversa.

$$2x = 3 - 7 \rightarrow 2x = -4$$

Agora, para finalizar, passaremos o 2 para o outro lado da igualdade. Como o 2 está multiplicando, passará dividindo.

$$x = -\frac{4}{2} = -2$$

2. $2 - 3p = 5p + 2$

O primeiro passo é deixar tudo o que tem p de um lado e o que não tem do outro. Desta forma, temos:

$$-3p - 5p = 2 - 2 \rightarrow -8p = 0$$

Agora passamos o 8 para o outro lado da igualdade, obtendo:

$$p = \frac{0}{-8} = 0$$

3. $23x - 16 = 14 - 17x$

Assim como no exercício anterior, deixamos o que tem a incógnita de um lado e o que não tem de outro.

$$23x + 17x = 14 + 16 \rightarrow 40x = 30$$

Agora basta isolar *x*.

$$x = \frac{30 : 10}{40 : 10} = \frac{3}{4}$$

4. $-2(y-1) = 2y + 4$

O primeiro passo neste exercício é a propriedade distributiva.

$$-2y + 1 = 2y + 4$$

Seguindo os mesmos passos dos exercícios anteriores temos:

$$-2y - 2y = 4 - 1 \rightarrow -4y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

5. $\frac{3x}{4} + 2 = \frac{5}{3} + \frac{x}{6}$

Para começar devemos decompor os denominadores em fatores primos. Desta forma, o mínimo passa o ser 12.

$$\frac{9x + 24}{12} = \frac{20 + 2x}{12}$$

Ao trabalhar com equações, podemos desconsiderar o denominador quando calcularmos o mínimo. Desta forma, a equação passa a ficar 9x + 24 = 20 + 2x. Resolvendo-a, temos:

$$9x - 2x = 20 - 24 \rightarrow 7x = -4 \rightarrow x = -\frac{4}{7}$$

6. $\frac{f-5}{10} + \frac{1-2f}{5} = \frac{3-f}{4}$

O mínimo entre 10, 5 e 4 é o 20. Assim sendo, temos:

$$\frac{2f - 10 + 4 - 8f}{20} = \frac{15 - 5f}{20}$$

Desconsiderando-se os denominadores, temos:

$$2f - 10 + 4 - 8f = 15 - 5f \rightarrow -6f - 6 = 15 - 5f \rightarrow -6f + 5f = 15 + 6 \rightarrow -f = 21$$

O resultado que queremos obter é o valor de *f*, e não –*f*. Assim sendo, devemos multiplicar toda a equação por -1.

$$-f \,.\, -1 = 21 \,.\, -1 \rightarrow f = -21$$

7. $2(6n-4)=3(4n-1)$

Primeiro temos que resolver as distributivas.

$$12n - 14 = 12n - 3$$

Observe que, ao passar quem tem n para um lado e quem não tem para outro, passamos a perceber que esta equação não tem solução.

$$12n - 12n = -3 + 14 \rightarrow 0n = 11 \rightarrow n = \frac{11}{0}$$

Como não é possível a divisão por zero, esta equação não tem solução

8. A tabela abaixo apresenta as notas de avaliações de matemática de determinado aluno durante o semestre letivo, com seus respectivos pesos:

Prova	P1	B1	P2	B2
Nota	4,0	5,0	4,5	
Peso	1,6	2,4	2,4	3,6

As notas das avaliações são sempre arredondas de 0,5 em 0,5 ponto, e para o aluno ser aprovado é necessário que a média final ponderada, calculada entre as quatro provas, seja maior ou igual a 5,0.

Qual deve ser a nota mínima da prova B2 para que o aluno seja aprovado?

A nota de B2 é o que desejamos saber. Assim sendo, neste momento ela é a incógnita. Desta forma, poderemos atribuir á ela uma letra. Usaremos o x. Como a soma de cada nota multiplicada pelo peso deve resultar na média mínima para aprovação, ou seja, 5,0, temos:

$$\left(\frac{4.1{,}6 + 5.2{,}4 + 4{,}5\,.\,2{,}4 + x.3{,}6}{10}\right) = 5$$

Por que usamos o 10. Pois esta é uma média ponderada. A soma das notas multiplicadas pelos pesos deve ser dividida pela soma dos pesos, antes caso 10. Assim sendo, temos:

$$\frac{6{,}4 + 12 + 10{,}8 + x.3{,}6}{10} = 5 \rightarrow 29{,}2 + 3{,}6x = 5\,.\,10 \rightarrow 29{,}2 + 3{,}6x = 50$$

Iremos agora isolar x, obtendo:

$$3{,}6x = 50 - 29{,}2 \rightarrow 3{,}6x = 20{,}8 \rightarrow x = \frac{20{,}8}{3{,}6} = 5{,}7$$

Como as notas tem que ser arredondadas de 0,5 em 0,5, o aluno precisa de 6,0 para ser aprovado.

9. Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2m + n = -5 \\ 3m + 10n = 1 \end{cases}$

A melhor maneira de resolver este sistema é definir equações equivalentes. Há várias maneiras de fazer. Proponho multiplicar a equação de cima por 3 e a de baixo por -2. Desta forma eliminaremos a variável *m*. A opção de multiplicar por 2 e por 3 deve-se a serem estes os coeficientes de m nas equações. Assim sendo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6m + 3n = -15 \\ -6m - 20n = -2 \end{cases}$$

Observe que 6m – 6m = 0. Desta forma, eliminamos a variável m. Assim sndo, o sistema fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} 6m + 3n = -15 \\ -6m - 20n = -2 \\ - - - - - - - - - \\ \quad -17n = -17 \end{cases}$$

Podemos então calcular o valor de *n*. ➔ $-17n = -17 \rightarrow n = \frac{-17}{-17} \rightarrow n = 1$

Agora que temos o valor de *n*, podemos calcular *m* substituindo *n* por 1 em qualquer uma das equações do sistema. Por ser uma equação mais simples escolhi 2m + n = -5.

$$2m + n = -5 \rightarrow 2m + 1 = -5 \rightarrow 2m = -5 - 1 \rightarrow 2m = -6 \rightarrow m = \frac{-6}{2} \rightarrow m = -3$$

$$m = -3 \; e \; n = 1$$

Você pode validar uma função substituindo os valores calculados para verificar se a igualdade está sendo satisfeita. Assim sendo, na primeira equação temos:

$$2m + n = -5 \rightarrow 2.(-3) + 1 = -5 \rightarrow -6 + 1 = -5 \rightarrow -5 = -5$$

Observe que a igualdade foi satisfeita. Se pegarmos a segunda equação temos:

$3m + 10n = 1 \rightarrow 3.(-3) + 10.1 = 1 \rightarrow -9 + 10 = 1 \rightarrow 1 = 1$

Como a validação das duas equações deram certo, então a solução do sistema está correta. Você não é obrigado a validar, mas a validação mostrar se você acertou ou não o exercício.

Nos exercícios de 10 a 14, determine as raízes das equações:

10. $n^2 + 12n + 35 = 0$

Iniciaremos a solução deste exercício usando a fórmula de Bhaskara, observando que nesta equação os coeficientes são **a = 1 b = 12 c = 35**. Primeiro, determinaremos o valor de Delta.

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \rightarrow 12^2 - 4.1.35 \rightarrow 144 - 140 = 4$$

Agora que temos o valor de delta, vamos calcular as raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \frac{-12 \pm \sqrt{4}}{2.1} \rightarrow \frac{-12 \pm 2}{2}$$

Agora temos duas opções para o valor de **n:** Usando + 2 e -2, ou seja:

$$x' = \frac{-12 + 2}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x'' = \frac{-12 - 2}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Assim sendo, a solução do exercício é $S = \{-7, -5\}$

Nem sempre Bhaskara é a melhor maneira de resolver uma equação do 2º grau. Quando o coeficiente **a** for igual a 1, pode-se tentar primeiro resolver por soma e produto. Devemos buscar dois números **x** e **y** que somados resultem no oposto de **b**, e multiplicados resultem em **c**, ou seja:

x + y = -b **x . y = c**

Se o coeficiente **b** é 12 e **c** é 35, temos:

-7 – 5 = -12, que é o oposto de **b** e (-7) . (-5) = 35, ou seja, igual a **c**.

11. $z^2 - 12z = -35$

Antes de resolver, devemos igualar a equação a zero, obtendo $z^2 - 12z + 35 = 0$

Como o coeficiente **a** é igual a 1, temos que encontrar dois números que multiplicados resultem em 35 e somados em 12. Pela tabuada, temos que 1 . 35 = 35, mas a soma ou multiplicação destes dois números não é igual a 12. Na tabuada do 2 não temos 35. Na tabuada do 3, também não. Nem na do 4. Na do 5 temos que 5 . 7 = 35, e 5 + 7 = 12. Portanto, a solução deste exercício é $S = \{5, 7\}$.

Podemos provar por Bhaskara que soma e produto funcionam. Começaremos calculando delta: $\Delta = (-12)^2 - 4.1.35 \rightarrow 144 - 140 = 4$

Agora que temos delta, vamos calcular as duas raízes.

$$z = \frac{-(-12) \pm \sqrt{4}}{2.1} \rightarrow \frac{12 \pm 2}{2}$$

$$z' = \frac{12+2}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$z'' = \frac{12-2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ou seja, a solução é a mesma que chegamos com soma e produto. Qual método você acha mais fácil? Se treinar um pouco, verá que soma e produto é mais fácil.

12. $20p + p^2 = 0$

Esta é uma equação incompleta em **c**. Por favor, não vá usar Bhaskara hein!!! Se não te reprovo direto... rs... antes de iniciar, devemos colocar a equação na ordem certa:

$p^2 + 20p = 0$. Colocando o fator comum **p** em evidência temos:

$$p\,(p + 20) = 0$$

Para que esta multiplicação seja zero, uma das condições é que o coeficiente *p* seja zero. A outra condição é que o coeficiente $p + 20 = 0 \rightarrow p = 0 - 20 \rightarrow p = -20$

Assim sendo a solução da equação é $S = \{-20, 0\}$

13. $13x + 26x^2 = 0$

Exercício semelhante ao anterior. Colocando o fato **x** em evidência, temos:

$$x(13 + 26x) = 0 \rightarrow x = 0 \; ou \; 13 + 26x = 0 \rightarrow 26x = -13 \rightarrow x = \frac{-13 : 13}{26 : 13} = -\frac{1}{2}$$

Assim sendo, o conjunto solução é $S = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

14. $f^2 + 4f + 4 = 0$

Observe que o coeficiente a é igual a 1. Desta forma, precisamos de dois números cuja soma seja -4 e a multiplicação 4. Na tabuada do 1, temos que 1 . 4 = 4. Mas 1 + 4 somados ou subtraídos não resultam em 4. Na tabuada do 2, temos que (-2) . (-2) igual a 4, e (-2) + (-2) = -4, ou seja, o posto de **b.** Desta forma, o conjunto solução é $S = \{-2, -2)$. Fácil não?

15. Encontre dois números cuja soma seja -9 e o produto 14.

Sempre que trabalhar com soma e produto, procure fechar primeiro a multiplicação. Na tabuada do 1, temos que 1 . 14 = 14, Mas 1 e 14 somados ou subtraídos não resultam em 9. Já na tabuada do 2, temos que 2 . 7 = 14, assim como (-2) . (-7). Assim como (-2) + (-7) = -9. Assim sendo, o conjunto solução deste exercício é $S = \{-7, -2\}$