Matemática Aplicada

Aula 5

- Polinomios

Prof. Jefferson Ricart Pezeta

1. Polinômios

Um polinômio na variável x é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

Polinômio com um único termo é chamado de monômio; com dois termos, é chamado de binômio, e com três termos, de trinômio.

Exemplos

$$3x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$2x^5 + \frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 2x - 3$$

Termos semelhantes

Termos dos polinômios que têm a mesma variável, elevada à mesma potência, são chamados de termos semelhantes.

Exemplo

Nos polinômios $3x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1$ e $-x^2 + 2x - 3$, os termos semelhantes são:

$2x^2$ e $-x^2$

$-x$ e $2x$

1 e -3

Adição e subtração de polinômios

Para adicionar os subtrair polinômios, adicionamos ou subtraímos os termos semelhantes.

Exemplos

$$\left(2x^3-3x^2+4x-1\right)+\left(x^3+2x^2-5x+3\right)=$$
$$\left(2x^3+x^3\right)+\left(-3x^2+2x^2\right)+\left(4x+(-5x)\right)+\left(-1+3\right)=$$
$$3x^3-x^2-x+2$$

$$\left(4x^2+3x-4\right)-\left(2x^3+x^2-x+2\right)=$$
$$\left(0-2x^3\right)+\left(4x^2-x^2\right)+\left(3x-(-x)\right)+\left(-4-2\right)=$$
$$-2x^3+3x^2+4x-6$$

Multiplicação de polinômios

A multiplicação de dois polinômios requer a multiplicação de cada termo de um polinômio por todos os termos do outro, aplicando a propriedade distributiva.

Na multiplicação de cada um dos termos, como as variáveis são as mesmas, utiliza-se da propriedade do produto de potências de mesma base. Em seguida, os termos semelhantes resultantes devem ser adicionados.

Exemplos

$$(3x+2).(4x-5)=$$
$$(3x.4x)+(3x.(-5))+(2.4x)+2.(-5))=$$
$$12x^2-15x+8x-10=$$
$$12x^2-7x-10$$

2. Produtos Notáveis

Sendo **u** e **v** números reais, variáveis ou expressões algébricas, temos os seguintes resultados:

Produto de uma soma e uma diferença	$(u+v).(u-v)=u^2-v^2$
Quadrado da soma	$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$
Quadrado da diferença	$(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$
Cubo da soma	$(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$
Cubo da diferença	$(u-v)^3=u^3-3u^2v+3uv^2-v^3$

3. Fatoração de Polinômios

Fatorar um polinômio significa escrevê-lo como um produto de dois ou mais fatores.

Um polinômio que não pode ser fatorado está na forma irredutível. Os produtos notáveis podem ajudar na fatoração.

Fatores comuns em evidência

O primeiro passo na fatoração de um polinômio é remover e colocar em evidência fatores comuns de seus termos usando a propriedade distributiva.

Exemplos

$$2x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(x^2 + x - 3)$$

$$u^3v + uv^3 = uv\left(u^2 + v^2\right)$$

Fatoração da diferença de quadrados

Ao identificar a diferença de dois quadrados é possível fatorar a expressão por meio do produto de uma soma e uma diferença.

Exemplo

$$25x^2 - 36 = (5x)^2 - 6^2 = (5x+6)(5x-6)$$

Fatoração de um trinômio

Um trinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado utilizando as raízes da equação do 2º grau correspondente, $ax^2 + bx + c$ = 0, x_1 e x_2: $\boxed{ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)}$

Exemplo

$$x^2 - 5x + 6 = 1.(x-3).(x-2)$$

Fatoração por agrupamento

Se um polinômio com quatro termos é o produto de dois binômios, os termos podem ser agrupados para fatorar. Para isso, a fatoração dos termos comuns em evidência é utilizada duas vezes.

Exemplo

$$3x^3 + x^2 - 6x - 2 = x^2(3x+1) - 2(3x+1) = (3x+1).(x^2 - 2)$$

4. Simplificação de Expressões Racionais

Expressões racionais

Uma expressão racional é o quociente ou razão de dois polinômios.

Exemplos

$$\frac{3x^3 + x^2 - 6x - 2}{(3x+1)}, \text{ sendo } x \neq -\frac{1}{3}$$

$$\frac{6x-2}{x-1}, \text{ sendo } x \neq 1$$

Simplificação de expressões racionais

Uma expressão racional $\frac{uz}{vz}$, sendo u, v e **z** variáveis ou expressões algébricas com **z**, $v \neq 0$, pode ser escrita na forma mais simples usando $\frac{uz}{vz} = \frac{u}{v}$

Isso requer a fatoração do numerador e do denominador. Quando os fatores comuns do numerador e do denominador forem removidos, a expressão racional está na forma reduzida.

Exemplos

$$\frac{3x^3 + x^2 - 6x - 2}{(3x+1)} = \frac{(3x+1)(x^2-2)}{(3x+1)} = (x^2 - 2)$$

$$\frac{6x-2}{3x-1} = \frac{2(3x-1)}{3x-1} = 2$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{(x+1)}{(x-1)}$$

5. Exercícios

1. Opere com as expressões algébricas, reduzindo-as à forma mais simples:

   a. $4b^3 + 7b - 11 + 3b^3 - 2b + 1 =$

b. $(2x-3)(x+5)=$

c. $(y^3+9y-3)-(y^3-4y-2)=$

d. $(r-10)-(r-10)=$

e. $(3v^2-2v+9)-(3v-1).(v+4)=$

f. $(-4pq^2).(3p^3q)=$

2. Desenvolva os produtos:

a. $(c+5)(c-5)=$

b. $(m-3)^2=$

c. $(2-5p)(2+5p)=$

d. $(3p+1)^2=$

3. Fatore as expressões:

a. $30x^2-12x+18xy=$

b. $25c^2-4d^2=$

c. $5x^2-5x+xy-y=$

d. $y^2-16y+64=$

e. $9m^2+6mn+n^2=$

4. Simplifique as expressões:

a. $\frac{18x^3}{15x} =$

b. $\frac{x^3}{x^2 - 2x} =$

c. $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12} =$

d. $\frac{4x^2 - 1}{2x^3 + x^2} =$

RESOLUÇÕES

5. Exercícios

1. Opere com as expressões algébricas, reduzindo-as à forma mais simples:

a. $4b^3 + 7b - 11 + 3b^3 - 2b + 1 =$

Observe que temos alguns termos semelhantes. Se agruparmos estes termos obtemos:

$4b^3 + 3b^3 + 7b - 2b - 11 + 1$

Somando os termos semelhantes temos:

$7b^3 + 5b - 10$

b. $(2x - 3)(x + 5) =$

Inicialmente devemos usar a propriedade distributiva, obtendo:

$2x \cdot x + 2x \cdot 5 + (-3) \cdot x + (-3) \cdot 5 \Rightarrow 2x^2 + 10x - 3x - 15 \Rightarrow 2x^2 + 7x - 15$

c. $(y^3 + 9y - 3) - (y^3 - 4y - 2) =$

Observe que o segundo parênteses é precedido de uma subtração. Desta forma, conforme já vimos em aulas anteriores, eliminamos os parênteses invertendo as operações de dentro deles. Desta forma temos:

$Y^3 + 9y - 3 - y^3 + 4y + 2$. Somando os termos semelhantes temos:

13y - 1

d. $(r - 10) - (r - 10) =$

Assim como o exercício anterior, eliminamos o parênteses invertendo a operação, ou seja:

r – 10 - r + 10 ➔ 0

e. $(3v^2 - 2v + 9) - (3v - 1).(v + 4) =$

Observe que te nos um produto (multiplicação) o qual deve ser considerado, pois pelas definições matemáticas temos que, em qualquer expressão, as multiplicações vêm antes das adições e subtrações.

$(3v^2 - 2v + 9) - (3v . v + 3v . 4 + (-1) . v + (-1) . 4)$.

$(3v^2 - 2v + 9) - (3v^2 + 12v - v - 4)$ ➔ $(3v^2 - 2v + 9) - (3v^2 + 11v - 4)$

Agora devemos eliminar os parênteses.

$3v^2 - 2v + 9 - 3v^2 - 11v + 4$ ➔ $-13v + 13$

f. $(-4pq^2).(3p^3q) =$

Se eliminarmos os parênteses e agruparmos os termos semelhantes temos:

$-4 . 3 . p . p^3 .q^2 . q$. Aplicando o conceito de multiplicações de potências de mesma base, quando devemos manter a base e somar os termos semelhantes, temos:

$-12p^4q^3$

2. Desenvolva os produtos:

a. $(c + 5)(c - 5) =$

Muitos provavelmente resolveriam este exercício aplicando a propriedade distributiva. Apesar de não ser errado, observe que trata-se do produto da soma pela diferença. Assim sendo, basta considerar o quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo, obtendo:

$c^2 – 5^2$ ➔ $c^2 - 25$

b. $(m-3)^2 =$

Trata-se do quadrado de uma diferença. Pelas definições já estudadas temos:

$m^2 – 2.m.3 – 3^2$ ➔ $m^2 - 6m + 9$

c. $(2-5p)(2+5p) =$

Também temos aqui o produto da soma pela diferença. Assim sendo, temos:

$2^2 – (5p)^2$ ➔ $4 – 25p^2$

d. $(3p+1)^2 =$

Aqui temos o quadrado de uma soma. Por definição, temos:

$(3p)^2 + 2 . 3p . 1 + 1^2$ ➔ $9p^2 + 6p + 1$

3. Fatore as expressões:

a. $30x^2 - 12x + 18xy =$

Observe que temos o **x** como fator comum. Além disso, o número 6 é divisor comum. Assim sendo, temos:

$6x (5x – 2 + 3y)$

b. $25c^2 - 4d^2 =$

Observe que temos a diferença de quadrados. A expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$(5c)^2 – (2d)^2$. Esta expressão pode ser fatorada como o produto da soma pela diferença, obtendo:

$(5c + 2d) (5c – 2d)$

c. $5x^2 - 5x + xy - y =$

Observe que temos dois agrupamentos de termos semelhantes. No primeiro agrupamento o fator comum é 5x. No segundo é y. Assim sendo, temos:

5x (x – 1) + y (x – 1). Fatorando obtemos: (5x + y) (x – 1)

d. $y^2 - 16y + 64 =$

Temos aqui uma equação de 2º grau. Por soma e produto temos:

8 . 8 = 64 (coeficiente **c**) e 8 + 8 = 16 (oposto do coeficiente **b).** Assim sendo, as raízes desta equação são {8, 8}. Desta forma, fatorando a expressão temos (y – 8) (y – 8) = $(y - 8)^2$

e. $9m^2 + 6mn + n^2 =$

Temos aqui uma expressão conhecida como trinômio do quadrado perfeito. Um trinômio pode considerado do quadrado perfeito quando o produto das raízes dos termos ao quadrado vezes 2 for igual ao termo central do trinômio. Para ficar mais claro, a raiz do primeiro termo fica **3m**. A raiz do segundo é **n**. Se multiplicarmos as duas raízes obtemos:

2 . 3m . n = 6mn, ou seja, é igual ao termo central. Desta forma, a expressão fatorada é a soma das raízes elevada ao quadrado, ou seja, o quadrado de uma soma:

$(3m + n)^2$

Se ao invés de +6mn tivéssemos -6mn, a fatoração seria o quadrado da diferença.

4. Simplifique as expressões:

a. $\dfrac{18x^3}{15x} =$

Esta expressão poderia ter sido expressa da seguinte forma: $\frac{18}{15} . \frac{x^3}{x}$

Usando as propriedades já estudadas em outras aulas, e simplificando 18 e 15 por 3, temos: $\frac{6x^2}{5}$

b. $\dfrac{x^3}{x^2 - 2x} =$

Podemos iniciar fatorando o denominador pela técnica do fator comum. Também podemos fatorar o x^3 do numerador. Desta forma, obtemos

$$\frac{x^2.x}{x(x-2)}$$

Simplificando o fator **x** do numerador e do denominador, temos:

$$\frac{x^2}{x-2}$$

c. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12}=$

Vamos começar fatorando o numerador. Temos, por soma e produto, que **(-3) . (-3) = 9** e

(-3) + (-3)= - 6. Assim sendo, a expressão pode ser reescrita como **$(x + 3)^2$**, ou **(x + 3) (x + 3)**

Fatorando o numerador temos: **4 . (-3) = -12 e 4 + (-3) = 1.** Assim sendo, a expressão pode ser expressa como **(x + 3) (x – 4).**

Escrevendo as duas expressões na fração temos:

$\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x-4)}$

Simplificando (x + 3) do numerador com o denomina dor temos:

$$\frac{x+3}{x-4}$$

d. $\frac{4x^2-1}{2x^3+x^2}=$

A expressão do numerador pode ser expressa pela diferença de quadrados, pois a raiz de 4 é 2, a raiz de x^2 é x e a raiz de 1 é 1. Desta forma, temos:

$4x^2 - 1 = (2x + 1) (2x - 1)$

No numerador temos **x** como fator comum. Desta forma, temos:

$2x^3 + x^2 = x^2 (2x + 1)$.

Escrevendo as duas expressões na fração temos:

$$\frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2(2x+1)}$$

Simplificando **2x + 1** do numerador e do denominador temos:

$$\frac{2x-1}{x^2}$$